



逆矩阵及应用

林胤榜

同济大学数学科学学院

主要内容

- 1 逆矩阵
- 2 逆矩阵的性质
- 3 逆矩阵的初步应用

逆矩阵

定义

假设 $A \in M_{n \times n}$. 若 $\exists B \in M_{n \times n}$ 使得

$$AB = E_n = BA,$$

则称 A 是可逆矩阵, B 为 A 的逆矩阵.

逆矩阵

定义

假设 $A \in M_{n \times n}$. 若 $\exists B \in M_{n \times n}$ 使得

$$AB = E_n = BA,$$

则称 A 是可逆矩阵, B 为 A 的逆矩阵.

命题

若 A 有逆矩阵, 则逆矩阵是唯一的.

逆矩阵

定义

假设 $A \in M_{n \times n}$. 若 $\exists B \in M_{n \times n}$ 使得

$$AB = E_n = BA,$$

则称 A 是可逆矩阵, B 为 A 的逆矩阵.

命题

若 A 有逆矩阵, 则逆矩阵是唯一的.

因为假设 B_1 和 B_2 均是 A 的逆矩阵, 则

$$B_1 = B_1 E = B_1 (A B_2) = (B_1 A) B_2 = E B_2 = B_2.$$

A 的逆矩阵记为 A^{-1} .

定义

假设 A 是 n 阶方阵, 它的 (i, j) 元的代数余子式记为 A_{ij} . 称方阵

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

为 A 的伴随矩阵.

定义

假设 A 是 n 阶方阵, 它的 (i, j) 元的代数余子式记为 A_{ij} . 称方阵

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

为 A 的伴随矩阵.

得到伴随矩阵的步骤:

- 1 将矩阵中每一项替换成它的代数余子式;
- 2 转置.

命题

$$AA^* = A^*A = |A|E.$$

证明.

记 $A = (a_{ij})$, $AA^* = (b_{ij})$. 则

$$b_{ij} = \sum_{s=1}^n a_{is}A_{js} = \begin{cases} |A|, & \text{当 } i = j \\ 0, & \text{当 } i \neq j. \end{cases}$$

所以,

$$AA^* = \begin{pmatrix} |A| & & & \\ & |A| & & \\ & & \ddots & \\ & & & |A| \end{pmatrix} = |A|E.$$

类似地, $A^*A = |A|E$.

定理

若 A 可逆, 则 $|A| \neq 0$.

证明.

若 A 可逆, 则 $\exists B$ 使得 $AB = E$. 又 $|A||B| = |AB| = |E| = 1$, 所以 $|A| \neq 0$. □

定理

若 A 可逆, 则 $|A| \neq 0$.

证明.

若 A 可逆, 则 $\exists B$ 使得 $AB = E$. 又 $|A||B| = |AB| = |E| = 1$, 所以 $|A| \neq 0$. □

由前一命题可得

定理

若 $|A| \neq 0$, 则 A 可逆, 且

$$A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}.$$

此处 A^* 是 A 的伴随阵.

定义

若 $|A| = 0$, 则 A 是奇异矩阵, 否则 A 是非奇异矩阵.

由上述定理可知,

A 可逆 $\iff A$ 非奇异.

定义

若 $|A| = 0$, 则 A 是奇异矩阵, 否则 A 是非奇异矩阵.

由上述定理可知,

$$A \text{可逆} \iff A \text{非奇异}.$$

推论

若 $AB = E$ 或 $BA = E$, 则 $B = A^{-1}$.

证明.

若 $AB = E$, 则 $|A||B| = |E| = 1$. 那么 $|A| \neq 0$. 所以 A 可逆, 将它的逆记为 A^{-1} . 另外, $A^{-1}AB = A^{-1}E$. 所以 $B = A^{-1}$. \square

若要验证 B 是 A 的逆矩阵, 只需验证 $AB = E$ 或者 $BA = E$.

逆矩阵与逆映射

之前讲到, 一个方阵 $A \in M_{n \times n}$ 给出一个线性映射

$$\begin{aligned}L_A: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ X &\mapsto AX\end{aligned}$$

即对任一向量 $X \in \mathbb{R}^n$, $L_A(X) = AX$. 而且矩阵的乘法对应映射的复合:

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^n &\xrightarrow{L_B} \mathbb{R}^n \xrightarrow{L_A} \mathbb{R}^n \\ X &\mapsto BX \mapsto ABX\end{aligned}$$

即 \forall 列向量 $X \in \mathbb{R}^n$,

$$(L_A \circ L_B)(X) = L_A(L_B(X)) = L_A(BX) = A(BX) = (AB)X = L_{AB}(X).$$

若 A 可逆, 记它的逆为 A^{-1} , 则

$$(L_A \circ L_{A^{-1}})(X) = A(A^{-1}X) = (AA^{-1})X = EX = X$$

$$(L_{A^{-1}} \circ L_A)(X) = A^{-1}(AX) = (A^{-1}A)X = EX = X$$

因此, L_A 和 $L_{A^{-1}}$ 互为逆映射.

逆矩阵的性质

(i) 若 A 可逆, 则 A^{-1} 可逆, 且 $(A^{-1})^{-1} = A$.

证明.

$AA^{-1} = E$, A 是 A^{-1} 的逆. □

逆矩阵的性质

(i) 若 A 可逆, 则 A^{-1} 可逆, 且 $(A^{-1})^{-1} = A$.

证明.

$AA^{-1} = E$, A 是 A^{-1} 的逆. □

问题

$|A^{-1}| = ?$

逆矩阵的性质

(i) 若 A 可逆, 则 A^{-1} 可逆, 且 $(A^{-1})^{-1} = A$.

证明.

$AA^{-1} = E$, A 是 A^{-1} 的逆. □

问题

$|A^{-1}| = ?$

$$|A^{-1}| = |A|^{-1}.$$

(ii) 若 A 可逆, $\lambda \neq 0$, 则 λA 可逆, 且 $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}$.

(ii) 若 A 可逆, $\lambda \neq 0$, 则 λA 可逆, 且 $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}$.

证明.

$$\left(\frac{1}{\lambda}A^{-1}\right)(\lambda A) = \left(\lambda \cdot \frac{1}{\lambda}\right)(A^{-1}A) = 1 \cdot E = E,$$

所以 $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}$. □

(ii) 若 A 可逆, $\lambda \neq 0$, 则 λA 可逆, 且 $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}$.

证明.

$$\left(\frac{1}{\lambda}A^{-1}\right)(\lambda A) = \left(\lambda \cdot \frac{1}{\lambda}\right)(A^{-1}A) = 1 \cdot E = E,$$

所以 $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}$. □

(iii) 若 A 和 B 均为 n 阶可逆矩阵, 则 AB 可逆, 且

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

(ii) 若 A 可逆, $\lambda \neq 0$, 则 λA 可逆, 且 $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}$.

证明.

$$\left(\frac{1}{\lambda}A^{-1}\right)(\lambda A) = \left(\lambda \cdot \frac{1}{\lambda}\right)(A^{-1}A) = 1 \cdot E = E,$$

所以 $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}$. □

(iii) 若 A 和 B 均为 n 阶可逆矩阵, 则 AB 可逆, 且

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

证明.

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = E.$$



(iv) 若 A 可逆, 则 A^T 可逆.

证明.

因为

$$(A^T)(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = E^T = E,$$

所以 $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$. □

记号:

若 A 可逆, $k > 0$,

$$A^0 = E, \quad A^{-k} := (A^k)^{-1}.$$

那么, 对于 $k, l \in \mathbb{Z}$,

$$A^{k+l} = A^k \cdot A^l, \quad (A^k)^l = A^{kl}.$$

相关例子

例子

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

求 A^{-1} .

首先, $|A| = ad - bc$. 另外,

$$A^* = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

则

$$A^{-1} = \frac{A^*}{|A|} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

例子

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

($|A| = -1$, 则 A 可逆.) 求 A^{-1} .

例子

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

($|A| = -1$, 则 A 可逆.) 求 A^{-1} .

$$M_{11} = 8 - 9 = -1 \quad M_{12} = 4 - 3 = 1 \quad M_{13} = 3 - 2 = 1$$

$$M_{21} = 8 - 6 = 2 \quad M_{22} = 4 - 2 = 2 \quad M_{23} = 3 - 2 = 1$$

$$M_{31} = 6 - 4 = 2 \quad M_{32} = 3 - 2 = 1 \quad M_{33} = 2 - 2 = 0$$

$$A^* = \begin{pmatrix} M_{11} & -M_{21} & M_{31} \\ -M_{12} & M_{22} & -M_{32} \\ M_{13} & -M_{23} & M_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{A^*}{|A|} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

逆矩阵的初步应用

例子

假设 A, B 可逆 (不一定同阶),

$$AXB = C,$$

则

$$X = A^{-1}(AXB)B^{-1} = A^{-1}CB^{-1}.$$

例子

假设 $AP = P\Lambda$, Λ 为对角阵, P 可逆. 求 A^n .

一般求 A^n 会比较复杂, 希望转成 Λ^n 的计算.

例子

假设 $AP = P\Lambda$, Λ 为对角阵, P 可逆. 求 A^n .

一般求 A^n 会比较复杂, 希望转成 Λ^n 的计算.

注意到 $A = P\Lambda P^{-1}$, 则

$$\begin{aligned} A^n &= (P\Lambda P^{-1})^n = \underbrace{(P\Lambda P^{-1})(P\Lambda P^{-1})\cdots(P\Lambda P^{-1})}_{n \text{ 个}} \\ &= P\Lambda^n P^{-1}. \end{aligned}$$

例子

设 $\varphi(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m$, $A \in M_{n \times n}$. 记

$$\varphi(A) = a_0 + a_1A + \cdots + a_mA^m,$$

称为矩阵 A 的 m 次多项式.

注意: 若 ψ 是另一多项式, 则 $\varphi(A)\psi(A) = \psi(A)\varphi(A)$.
希望利用上例计算 $\varphi(A)$.

若 $A = P\Lambda P^{-1}$, 其中 $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. 则

$$\begin{aligned}
 & \varphi(A) \\
 &= a_0 + a_1 A + \dots + a_m A^m \\
 &= P a_0 P^{-1} + a_1 P \Lambda P^{-1} + a_2 P \Lambda^2 P^{-1} + \dots + a_m P \Lambda^m P^{-1} \\
 &= P \begin{pmatrix} a_0 + a_1 \lambda_1 + \dots + a_m \lambda_1^m & & \\ & \ddots & \\ & & a_0 + a_1 \lambda_n + \dots + a_m \lambda_n^m \end{pmatrix} P^{-1} \\
 &= P \varphi(\Lambda) P^{-1}.
 \end{aligned}$$